**Exercice 1**

*On pourra noter indifféremment* $C_n^k$ *ou* $\binom{n}{k}$ *les coefficients de la formule du binôme de Newton.*

Dans tout l'exercice, on désigne par $n$ un entier naturel au moins égal à 2.
Deux joueurs A et B disposent d'une pièce pour laquelle la probabilité de faire "face" à chaque lancer est égale à $\frac{1}{2}$. Chacun des deux joueurs lance la pièce $n$ fois. On désigne par X, Y, Z et T les variables aléatoires suivantes :

X représente le nombre de "face" obtenus par A ; Y représente le nombre de "face" obtenus par B ;

Z = X + Y ; T = X – Y.

1. a. Déterminer la loi suivie par les variables aléatoires X et Y.
   b. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire Z.
2. a. Donner la probabilité de l'évènement (Z = 1).
   b. Donner la probabilité de l'évènement (Z = $n$).
3. a. Exprimer l'évènement (Z = $n$) à l'aide des évènements (X = $j$) et ($Y = k$), où $k$ sera exprimé en fonction de $j$.
   b. En déduire la valeur de la somme $S = \sum_{j=0}^{n} C_n^j C_n^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j}$.
4. a. Exprimer l'évènement (T = 0) à l'aide des évènements (X = $j$) et ($Y = k$), où $k$ sera exprimé en fonction de $j$.
   b. Déduire alors du 3° b la probabilité de l'évènement (T = 0).
5. a. Calculer la covariance de Z et de T.
   b. Z et T sont-elles indépendantes ? On pourra considérer les évènements (Z = 1) et (T = 0).

**Exercice 2**

On désigne par $E = \mathsf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée de degré au plus 2, à coefficients réels, auxquels on adjoint le polynôme nul.
Soit $I$ un intervalle ouvert non vide de R, et soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres réels appartenant à $I$ et tels que $a < b < c$.

PARTIE A

On considère l'application $u$ de $E$ dans $\mathsf{R}^3$ qui à tout élément $P$ de $E$ associe le triplet ($P(a)$, $P(b)$, $P(c)$).
1. Montrer que $u$ est un isomorphisme de $E$ dans $\mathsf{R}^3$.
2. a. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A$ appartenant à $E$ que l'on explicitera tel que $A(a) = 1$, $A(b) = 0$ et $A(c) = 0$.
   b. Donner sans justification l'expression des deux polynômes $B$ et $C$ appartenant à $E$ tels que :
   $B(a) = 0$, $B(b) = 1$ et $B(c) = 0$ et $C(a) = 0$, $C(b) = 0$ et $C(c) = 1$.
3. a. Montrer que ($A$, $B$, $C$) est une base de $E$.
   b. Soit $P$ un polynôme appartenant à $E$ : vu le 3° a, il existe un unique triplet ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) de réels tel que $P(x) = \alpha A(x) + \beta B(x) + \gamma C(x)$. Calculer $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ en fonction de $P$.

PARTIE B

1. Soit $g$ une fonction définie et de classe $C^2$ sur $I$ et telle que $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe $w \in ]a, c[$ tel que l'on ait $g''(w) = 0$.
*On donnera les hypothèses précises permettant l'emploi de ce théorème.*
2. Montrer que la propriété (1) suivante :

(1) Il existe $w \in ]a, c[$ tel que l'on ait : $\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{f''(w)}{2}$

est vraie pour $f = A$, pour $f = B$ et pour $f = C$, où $A$, $B$ et $C$ sont les polynômes définis dans la partie A.

3. Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ sur $I$.

a. On pose $P(x) = f(a)A(x) + f(b)B(x) + f(c)C(x)$. Vérifier que $P$ est un élément de $E$ qui prend les mêmes valeurs que $f$ en $a$, $b$ et $c$.

b. Soit $g$ la fonction définie sur $I$ par $g(x) = f(x) - P(x)$. Vérifier que $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. En déduire que $f$ possède la propriété (1).

c. Soit $x_0$ un point de $I$. Montrer que $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$.